



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

O5F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۳/۳

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	میلاد حسینی نامی
حسین شفیع زاده	ارسلان حسونند
	مهدی حاجی نژادیان



۱- اگر $f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - 3 & x > 1 \\ -ax + 4 & x < 1 \end{cases}$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

حد چپ و حد راست تابع را جداگانه به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax^2 - 3) = 2a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-ax + 4) = 4 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (2a - 3) - 2(4 - a) = 4a - 11 = 1 \Rightarrow a = 3$$

پس:

۲- هرگاه $f(x) = 2[-x] + 3[2x]$ در کدام نقطه با طول صحیح، مجموع حد چپ و راست تابع برابر ۲۷ است؟

(۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم $n \in \mathbb{Z}$ و جواب سؤال باشد، ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطه‌ای به طول n به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} 2[-(n^+)] + 3[2(n^+)] = 2(-n-1) + 3 \times 2n = 4n - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} 2[-(n^-)] + 3[2(n^-)] = -2n + 3(2n-1) = 4n - 3$$

جمع حد چپ و راست برابر ۲۷ است، پس:

$$4n - 2 + 4n - 3 = 27 \Rightarrow 8n = 32 \Rightarrow n = 4$$

۳- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود باشد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) + 3}{1 - f(x)} = -11$ باشد، آنگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} x - f^2(x)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

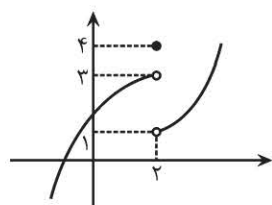
چون $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود است، فرض می کنیم $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = l$ آنگاه مطابق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) + 3}{1 - f(x)} = \frac{4l + 3}{1 - l} = -11 \Rightarrow 4l + 3 = 11l - 11 \Rightarrow 7l = 14 \Rightarrow l = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x - f^2(x) = 2 - 2^2 = -2$$

پس:

۴- اگر نمودار f شکل مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x^2 - x) = 3 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x^2 - x) = f(2) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(|2 - x|) = 4 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} |f(x) - 2| = 1 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳



گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(|2-x|)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} |2-x| = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(|2-x|) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2 = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - 2 = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 2 = 3 - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} |f(x) - 2| = 1 \quad \text{پس قابل قبول است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x = 2$$

۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + a\sqrt{x} - 6}{x^2 - 16} = b$ مقدار ab کدام است؟

$$\frac{-3}{32} \quad (4)$$

$$\frac{-5}{32} \quad (3)$$

$$\frac{5}{32} \quad (2)$$

$$\frac{3}{32} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

اولاً مخرج به ازای $x=4$ صفر است، پس صورت هم به ازای $x=4$ باید صفر باشد، پس:

$$4 + 2a - 6 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

ثانیا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{(x-4)(x+4)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4) \times 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2) \times 5}{8(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(\sqrt{x}-2)}{8(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{5}{32} \Rightarrow ab = 1 \times \frac{5}{32} = \frac{5}{32} \end{aligned}$$

روش دوم: هوییتال:

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{8} = \frac{5}{32} \Rightarrow ab = 1 \times \frac{5}{32} = \frac{5}{32}$$

۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(\alpha)$ به‌طوری که $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{x-1}$ باشد، α کدام است؟

$$-3 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 3)}{x-1} = 5$$

ابتدا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:



حال معادله $f(x)=5$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x-1}=5 \Rightarrow x^2+x+3=5$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \Rightarrow \underline{\alpha=-2} \end{cases}$$

۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{2-\sqrt{-2x-2}}$ برابر است با:

۴ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:

برای رفع ابهام و محاسبه حد از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)(2+\sqrt{-2x-2})}{(2-\sqrt{-2x-2})(2+\sqrt{-2x-2})(\sqrt{x+4}+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(4)}{(4+2x+2)(2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4(x+3)}{2(x+3) \times 2} = 1 \end{aligned}$$

روش دوم: از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Hop} \\ = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{\frac{2}{2\sqrt{-2x-2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

۸- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{ax+b}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} \right) = -1$ مقدار b کدام است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

-۶ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و ابهام $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ این قاعده را قاعده هوییتال گوئیم.

برای آنکه مقدار حد موجود باشد، باید ابهام ایجاد شده را در ابتدا رفع کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(ax+b)-2(x+2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(a-2)x+b-4}{x^2-4}$$

چون مخرج به ازاء $x=2$ برابر صفر شده است، پس صورت هم باید به ازای $x=2$ برابر صفر باشد، پس:

$$2(a-2)+b-4=0 \Rightarrow 2a+b=8$$

با این شرط صورت و مخرج هر دو عامل $x-2$ را دارند، آن را ساده می‌کنیم و از قاعده هوییتال برای راحتی کار کمک می‌گیریم.

$$\text{Hop: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a-2}{2x} = \frac{a-2}{4} = -1 \Rightarrow \underline{a=-2}$$

$$-4+b=8 \Rightarrow \underline{b=12}$$



۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^3)(1-\sqrt[3]{x})}{(x-1)^2}$ کدام عدد است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۹ (۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه ۱

حد به ابهام $\frac{0}{0}$ منجر شده است و عامل ابهام $x-1$ است. صورت و مخرج کسر را به صورتی تبدیل می‌کنیم که بتوانیم عامل ابهام را حذف کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x-1)^2(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(1-x)(1-x)}{3(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(1-x)^2}{3(x-1)^2} = 1$$

۱۰- f تابعی خطی است به طوری که $f(0) \neq 0$ ، هرگاه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)} - f(2x)}{x} = 3$ مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) -۵

پاسخ: گزینه ۴

چون f تابعی خطی است، پس فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$ و $b \neq 0$. با توجه به این که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b} - 2ax - b}{x} = 3$$

و چون مخرج صفر است، پس صورت هم باید صفر باشد، لذا:

$$\sqrt{b} - b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+1} - 2ax - 1}{x} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+1}} - 2a}{1} = \frac{a}{2} - 2a = 3 \Rightarrow -\frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x + 1 \Rightarrow f(3) = -6 + 1 = -5$$

۱۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x + \cos x}{\cos 2x + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

برای رفع ابهام و محاسبه حد ابتدا صورت و مخرج را ساده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x(\cos x + 1)}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x(1 + \cos x)}{(2\cos x + 1)(\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{2\cos x - 1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$



۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

در محاسبه حد به ابهام $\frac{0}{0}$ رسیده‌ایم و برای رفع ابهام از قاعده هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{Hop} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{\frac{3}{3\sqrt[3]{(1+3x)^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

تذکر: اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ به ابهام $\frac{0}{0}$ برسد آنگاه $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

۱۳- اگر مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+ax+4}{x^2+x-2}$ مقدار حقیقی ℓ باشد، مقدار $a\ell$ کدام عدد است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

برای محاسبه حد ابتدا رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+ax+4}{(x+2)(x-1)} = \ell$$

چون مخرج به ازای $x = -2$ صفر است، پس باید صورت هم به ازای $x = -2$ برابر صفر باشد.

$$8 - 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3} \Rightarrow a\ell = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

۱۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}} - \sqrt{x+3\sqrt{x}}}{x-1}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

برای رفع ابهام از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}} - \sqrt{x+3\sqrt{x}}}{x-1} & \times \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}} + \sqrt{x+3\sqrt{x}}}{\sqrt{3x+\sqrt{x}} + \sqrt{x+3\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x}}{(x-1)(\sqrt{x+3\sqrt{x}} + \sqrt{3x+\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-\sqrt{x})}{4(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



روش دوم: هوپیتال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} + \sqrt{x}} - \frac{1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}}{1} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{4}} = \frac{7}{4}$$

۱۵- اگر تابع $f(x) = x[2x] + k[x^2]$ در $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

نکته: شرط پیوستگی f در نقطه‌ای به طول α آن است که $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$

ابتدا مقدار تابع و حدهای یک‌طرفه f را در $x = 2$ به دست می‌آوریم، سپس آنها را برابر هم قرار می‌دهیم.

$$f(2) = 2 \times [4] + k[4] = 4k + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \times 4 + k \times 4 = 4k + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \times 2 + k \times 2 = 2k + 6$$

برای آنکه f در $x = 2$ پیوسته باشد، باید:

$$2k + 6 = 4k + 8 \Rightarrow k = -1$$

$$16- \text{ اگر } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{|x + 1|} & x \neq -1 \\ -3 & x = -1 \end{cases} \text{ کدام بیان درست است؟}$$

(۱) f در $x = -1$ فقط پیوستگی چپ دارد.

(۲) f در $x = -1$ فقط پیوستگی راست دارد.

(۳) f در $x = -1$ پیوستگی دارد.

(۴) f در $x = -1$ نه پیوستگی چپ دارد نه پیوستگی راست دارد.

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا حد چپ و حد راست تابع f را در $x = -1$ به دست می‌آوریم و آن را با $f(-1)$ مقایسه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{|x + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 1}{-(x + 1)} = -3$$

چون $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq f(-1)$ پس f در $x = -1$ پیوستگی چپ دارد، اما پیوستگی راست ندارد.

۱۷- اگر تابع $y = f(x)$ در $x = \alpha$ پیوسته باشد، کدام تابع الزاماً در α پیوسته است؟

- (۱) $y = f(-x)$ (۲) $y = f \circ f(x)$ (۳) $y = f^2(x)$ (۴) $y = \frac{1}{2f(x) + 1}$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: وقتی f در α پیوسته باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ البته باید $\alpha \in D_f$

در گزینه ۱ ممکن است $\alpha \in D_f$ اما $-\alpha \notin D_f$. مثلاً $y = \sqrt{x}$ در $x = 4$ پیوسته است اما در $x = -4$ پیوسته نمی‌باشد.



در گزینه ۲، f در α پیوسته است، اما ممکن است $f \circ f$ حتی در α تعریف نشده باشد. مثلاً $y = \sqrt{4-x}$ در $x = -2$ پیوسته است، اما $f \circ f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{4-x}}$ در $x = -2$ تعریف نشده است، زیرا $f \circ f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{4-x}}$ در $x = -2$ تعریف نشده است. گزینه ۳ جواب است، زیرا اگر f در α پیوسته باشد، آنگاه f^n در α پیوسته است. در گزینه ۴ ممکن است $f(\alpha) = -\frac{1}{2}$ و تابع $y = \frac{1}{2f(x)+1}$ در α تعریف نشده باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad \text{در } x=1 \text{ پیوسته باشد، مقدار } k \text{ کدام است؟}$$

$\frac{2}{3}$ (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: شرط آنکه تابع f در $x = \alpha$ پیوسته باشد، آن است که $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$

ابتدا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست می‌آوریم، برای این منظور دو روش داریم:

روش اول: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -\frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$

پس:

روش دوم: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \times 3}{(x-1) \times 2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$

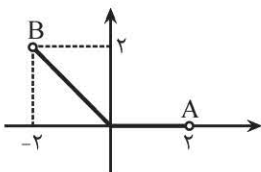
$$f(x) = \begin{cases} x \left[\frac{x}{2} \right] & |x| < 2 \\ ax + b & |x| \geq 2 \end{cases} \quad \text{در } \mathbb{R} \text{ پیوسته باشد، مقدار } f(4) \text{ کدام است؟}$$

-2 (۴) -1 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: یک تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است، هرگاه در تک تک نقاط حقیقی پیوسته باشد.

ابتدا نمودار $y = x \left[\frac{x}{2} \right]$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می‌کنیم.



$0 \leq x < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 0 \Rightarrow y = 0$

$-2 < x < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = -1 \Rightarrow y = -x$



اگر بخواهیم f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کافی است خط $y = ax + b$ از دو نقطه A و B عبور کند.

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{2-1} = -\frac{3}{1} = -3$$

$$AB: y = -3(x-2)$$

$$y = -3x + 6 \Rightarrow a = -3, b = 6$$

$$f(4) = -3 \times 4 + 6 = -6$$

۲۰- تابع $f(x) = (x^2 + ax + b) \left[\frac{x}{3} \right]$ در بازه $(0, 12)$ فقط در یک نقطه ناپیوستگی دارد، بیشترین مقدار b کدام است؟

۳۶ (۴)

۵۴ (۳)

۲۷ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

تابع $y = \left[\frac{x}{3} \right]$ در نقاط صحیح و مضرب ۳ ناپیوسته است.

تابع $f(x) = (x^2 + ax + b) \left[\frac{x}{3} \right]$ در نقاط صحیح و مضرب ۳ که ریشه $x^2 + ax + b$ نباشند، ناپیوسته است. برای آنکه تابع $f(x)$ در بازه $(0, 12)$ که شامل ۳ عدد صحیح مضرب ۳ است، فقط یک نقطه ناپیوستگی داشته باشد باید ۲ تا از ۳، ۶ یا ۹، ریشه‌های $x^2 + ax + b = 0$ باشند. حالات مختلف را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = (x-3)(x-6) \left[\frac{x}{3} \right] \quad x=3, x=6 \text{ ریشه آن باشد}$$

تنها نقطه ناپیوستگی $x=9$ است و $b=18$

$$f(x) = (x-3)(x-9) \left[\frac{x}{3} \right] \quad x=3, x=9 \text{ ریشه آن باشد}$$

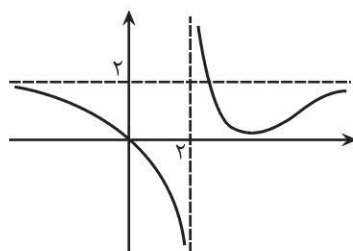
تنها نقطه ناپیوستگی $x=6$ است و $b=27$

$$f(x) = (x-6)(x-9) \left[\frac{x}{3} \right] \quad x=6, x=9 \text{ ریشه آن باشد}$$

تنها نقطه ناپیوستگی $x=3$ است و $b=54$

پس برای آنکه فقط یک ناپیوستگی داشته باشیم، یکی از ۳ حالت فوق برقرار است و البته بیشترین مقدار b برابر ۵۴ است.

روش دوم: b همان $\frac{c}{a}$ یا ضرب ریشه‌ها است که از بین ۳، ۶ و ۹ ضرب ۶ و ۹ بیشترین مقدار است که همان b است.



۲۱- نمودار f شکل مقابل است، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f \circ f(1-x)$ کدام است؟

$+\infty$ (۱)

$-\infty$ (۲)

۲ (۳)

صفر (۴)

پاسخ: گزینه ۳



نکته: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow \alpha} f \circ f(x)$ از داخل شروع می‌کنیم.

چون $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 2$ پس داریم:

$$x < -1 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow 2-x > 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f \circ f(1-x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ f(x)$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

۲۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{ax^2+bx+8} = +\infty$ ، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱۰ (۱)

-۸ (۲)

۸ (۳)

-۱۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

برای آنکه حاصل حد همواره $+\infty$ باشد، باید مخرج ریشه مضاعف $x=2$ داشته باشد و البته $a > 0$.

$$ax^2+bx+8 = 2(x-2)^2 = 2(x^2-4x+4) = 2x^2-8x+8$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases} \Rightarrow b-a = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{0^+} = +\infty$$

دقت کنید:

۲۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x]-k}{x^2-9} = +\infty$ حدود k کدام است؟

$k < 2$ یا $k > 3$ (۱)

$k > 3$ (۲)

$2 < k < 3$ (۳)

$k < 2$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

برای آنکه حد آن $+\infty$ شود باید هم حد چپ و هم حد راست هر دو $+\infty$ شوند، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]-k}{x^2-9} = \frac{3-k}{0^+} = +\infty \Rightarrow 3-k > 0 \Rightarrow k < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-k}{x^2-9} = \frac{2-k}{0^-} = +\infty \Rightarrow 2-k < 0 \Rightarrow k > 2$$

پس نهایتاً $2 < k < 3$ قابل قبول است.

۲۴- هرگاه $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2+8}}{ax^n-4}$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۱)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲



با توجه به آنکه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ داریم:

زیرا باید صورت و مخرج هم درجه باشند. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - |x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{ax^n} = 1 \begin{cases} n=1 \\ a=4 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 8}}{4x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - \sqrt{x^2 + 8})(3x + \sqrt{x^2 + 8})}{4(x-1)(3x + \sqrt{x^2 + 8})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x^2 - 8}{4(x-1) \times 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x-1)(x+1)}{24(x-1)} = \frac{2}{3}$$

۲۵- اگر $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$ کدام گزینه صحیح است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f(x) = -\infty \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{6}^-} f(x) = +\infty \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} f(x) = +\infty \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{6}^+} f(x) = +\infty \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر قرار باشد $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ نامتناهی باشد و f تابع کسری باشد، اگر صورت عددی حقیقی باشد، لازم است مخرج تابع در همسایگی α

برابر صفر باشد.

اولاً باید مخرج کسر صفر باشد، زیرا حد نامتناهی داریم:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{+} = +\infty$$

$$x > -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin x + 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} f(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-} = -\infty$$

$$x < -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin x + 1 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{6}^+} f(x) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-} = +\infty$$

$$x > \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin x + 1 < 0$$

$$x < \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin x + 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{6}^-} f(x) = -\infty$$

ثانیاً:



۲۶- هرگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^3 + a(x+2)^3}{bx^2 + x} = 12$ ، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۶ (۴) -۶

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر f و g دو چند جمله‌ای با درجه یکسان باشند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر ضریب بزرگترین درجه f است. ابتدا صورت را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^3 + a(x+2)^3}{bx^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+a)x^3 + (-12+6a)x^2 + \dots}{bx^2}$$

برای آنکه مقدار حد عدد حقیقی ۱۲ باشد، باید صورت و مخرج هم مرتبه باشند.

$$\begin{cases} \lambda+a=0 \\ \frac{-12+6a}{b}=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\lambda \\ \frac{-6\lambda}{b}=12 \end{cases} \Rightarrow b=-\lambda$$

۲۷- هرگاه $f(x) = \frac{x^2-3}{x-|x|}$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با توجه به دامنه تعریف تابع مشخص می‌شود تابع f برای $x \geq 0$ تعریف نشده است پس $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ بی‌معناست. اما

$$\text{اگر } x < 0 \text{ آنگاه } f(x) = \frac{x^2-3}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-3}{2x} = +\infty$$

زیرا صورت عددی منفی و مخرج، صفر منفی می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

۲۸- هرگاه $f(x) = \frac{ax+b}{2x+1}$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2+f(2x)) = 2$ مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۲۴ (۳) +۱۲ (۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

در این تست بهتر است که ابتدا ضابطه $x(2+f(2x))$ را به ساده‌ترین صورت بنویسیم، پس داریم:

$$x\left(2 + \frac{2ax+b}{4x+1}\right) = \frac{(\lambda+2a)x^2 + (b+2)x}{4x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+2a)x^2 + (b+2)x}{4x+1} = 2$$

اما طبق فرض:



پس باید اولاً صورت و مخرج هم درجه باشند، یعنی:

$$8 + 2a = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(b+2)x}{4x+1} = \frac{b+2}{4} \Rightarrow \frac{b+2}{4} = 2 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow ab = -24$$

ثانیاً:

۲۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+a}+x)$ برابر ۴ است، مقدار a کدام است؟

۲ (۲)

-۲ (۱)

-۸ (۴)

۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: یکی از صور ابهام $\infty \times \infty$ است که برای رفع ابهام باید آن را به صور دیگر تبدیل کنیم و سپس رفع ابهام کنیم.
برای محاسبه این حد از اتحاد مزدوج کمک می گیریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+a}+x)(\sqrt{x^2+a}-x)}{\sqrt{x^2+a}-x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2+a-x^2)}{\sqrt{x^2+a}-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{|x|-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{-2x} = -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

پس $-\frac{a}{2} = 4 \Rightarrow a = -8$

۳۰- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n + x^3 - 2}{ax^3 + x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ مقدار $a+n$ کدام عدد نمی تواند باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر f و g دو چندجمله ای باشند، برای یافتن $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ سه حالت را داریم:

- ۱) f درجه $> g$ درجه دارد $\Rightarrow$ حد نامتناهی دارد
- ۲) f درجه $< g$ درجه $\Rightarrow$ حد $= 0$
- ۳) f درجه $= g$ درجه $\Rightarrow$ حد $= \frac{\text{ضریب بزرگترین درجه } f}{\text{ضریب بزرگترین درجه } g}$

برای حالات مختلف n بحث می کنیم.

$$n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{ax^3} = \infty$$

$$n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{ax^3} = \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4, n = 3 \Rightarrow n+a = 7$$

$$n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{ax^3} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2, n < 3$$

$$\begin{cases} n=1, a=2 \Rightarrow n+a=3 \\ n=2, a=2 \Rightarrow n+a=4 \end{cases}$$

